



Nationale Mathematikolympiade

Kreisphase/Sektorenphase der Hauptstadt Bucharest, 2026

XII-te Klasse

Aufgabe 1. Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal ableitbare Funktion, mit einer stetigen zweiten Ableitung auf \mathbb{R} , mit der Eigenschaft, dass $\int_0^1 f(x) dx = 0$ und $\int_0^1 x \cdot f(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot f(x) dx$.

- a) Beweist, dass wenn $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion zweiten Grades ist, deren Graph bezüglich der Gerade mit der Gleichung $x = \frac{1}{2}$ symmetrisch ist, dann $\int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx = 0$ gilt.
- b) Beweist, dass es $c \in (0, 1)$ so gibt, dass $f''(c) = 0$.

Gazeta Matematică

Aufgabe 2. a) Es sei (G, \cdot) eine Gruppe, und $f : G \rightarrow G$ ein Endomorphismus von G . Zeigt, dass die Menge $F_f = \{x \in G \mid f(x) = x\}$ aller Fixpunkte des Endomorphismus f eine Untergruppe der Gruppe G ist.

- b) Es sei $n \in \mathbb{N}$, mit $n \geq 2$, und p der kleinste Primteiler von n . Beweist, dass die Zahl $m = \frac{n}{p} + 1$ die kleinste natürliche Zahl ist, mit der Eigenschaft, dass in einer jeden endlichen Gruppe G der Ordnung n , wenn es für ein Endomorphismus $f : G \rightarrow G$ einen Automorphismus $g : G \rightarrow G$ so gibt, dass die Menge $A = \{a \in G \mid f(a) = g(a)\}$ wenigstens m Elemente hat, dann ist f selber ein Automorphismus der Gruppe G .

Aufgabe 3. Es sei (G, \cdot) eine Gruppe mit dem Einheitsselement e , und H eine Untergruppe von G , mit $H \neq \{e\}$ und $H \neq G$. Wenn $(xy)^2 = yx$ für alle $x, y \in G \setminus H$ gilt, beweist, dass:

- a) $x^2 = y^3$, für alle $x \in G \setminus H$ und alle $y \in H$ gilt;
- b) $Z(G) = \{e\}$. $Z(G) = \{z \in G \mid z \cdot g = g \cdot z, \forall g \in G\}$ ist das Zentrum der Gruppe G , gebildet aus allen diejenigen Elemente der Gruppe G , die mit allen Elementen der Gruppe G umtauschbar sind.
- c) H ist kommutativ.

Aufgabe 4. Es sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige und bijektive Funktion, mit der Eigenschaft, dass

$$f(x) < x, \quad \text{pentru orice } x \in (0, 1).$$

Für $n \in \mathbb{N}^*$, bezeichnen wir $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ Funktionen}}$ und $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

- a) Beweist, dass für ein jedes $x \in (0, 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ gilt.
- b) Bestimmt $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

*Arbeitszeit 3 Stunden.**Jede Aufgabe wird mit 22,5 Punkte bewertet.*